ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α .

α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

Β₁. α. Λ , β. Σ , γ. Λ

Β₂. Γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-2,\ 1]$, $[3,\ 6]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ 3]$

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$z^2 + 2z + 2 = 0$, $\Delta = -4$ οπότε $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

Έστω $z_1 = -1 + i$ και $z_2 = -1 - i$

Τότε
$$\begin{aligned} z_1^{20} - z_2^{20} &= (-1+i)^{20} - (-1-i)^{20} \\ &= [(-1+i)^2]^{10} - [(-1-i)^2]^{10} \\ &= (1-2i-1)^{10} - (1+2i-1)^{10} \\ &= (-2i)^{10} - (2i)^{10} = (2i)^{10} - (2i)^{10} = 0 \end{aligned}$$

β.

$\rho = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, συνφ $= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ημφ $= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$, οπότε $z_1 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

και
$$\begin{aligned} z_1^{\nu} &= \left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{\nu} \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{\nu}\left(\text{συν}\frac{3\nu\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{3\nu\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Για να είναι ο z_1^{ν} πραγματικός, πρέπει $\text{ημ}\dfrac{3\nu\pi}{4} = 0 \iff$

$$\text{ημ}\frac{3\nu\pi}{4} = \text{ημ}0$$

$$\frac{3\nu\pi}{4} = \lambda\pi$$

$$\nu = \frac{4\lambda}{3} \text{ , όπου } \lambda \text{ θετικός ακέραιος}$$

Είναι $\lambda = 3\kappa + \upsilon$ με $\upsilon = 0 , 1 , 2$ και κ θετικό ακέραιο

Όταν $\upsilon = 0$, τότε $\lambda = 3\kappa$ οπότε $\nu = \dfrac{4 \cdot 3\kappa}{3} = 4\kappa \in \mathbb{Z}$

Όταν $\upsilon = 1$, τότε $\lambda = 3\kappa + 1$ οπότε $\nu = \dfrac{4(3\kappa+1)}{3} = 4\kappa + \dfrac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

Όταν $\upsilon = 2$, τότε $\lambda = 3\kappa + 2$ οπότε $\nu = \dfrac{4(3\kappa+2)}{3} = 4\kappa + \dfrac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$

Επομένως $\nu = 4\kappa$ με κ θετικό ακέραιο.

γ.

Η εικόνα της ρίζας z_1 είναι το σημείο $M(-1 , 1)$ ενώ η εικόνα της z_2 είναι το σημείο $M'(-1 , -1)$.

Επειδή τα σημεία M και M΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των x, ο ζητούμενος πίνακας είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Θέτω $\dfrac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = g(x)$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 5$

Τότε $f(x) = g(x) \cdot \eta\mu 2x + e^{2x} - 1$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(g(x) \cdot \eta\mu 2x + e^{2x} - 1\right) = 5 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$ θα ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

β.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu 2x + e^{2x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{e^{2x}-1}{x}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\dfrac{2\eta\mu 2x}{2x}\right)$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)$$

$$= 2\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right) = 2\cdot 5\cdot 1 = 10$$

και $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

Η (1) γίνεται $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 10 + 2 = 12$

Επομένως η f παραγωγίζεται στο $x_o = 0$ και μάλιστα ισχύει $f\,'(0) = 12$

γ.

Επειδή $h(0) = e^0 f(0) = 0$, έχουμε
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(e^{-x}\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} e^{-x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1\cdot 12 = 12$$

Δηλαδή $h'(0) = 12$

Αφού λοιπόν $h'(0) = 12 = f\,'(0)$, οι εφαπτομένες στα σημεία $A(0,\ f(0))$ και $B(0,\ h(0))$ είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4ο

$$P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}\ ,\quad t \geq 0$$

α.

$$P(0) = 4 + \frac{-6}{\frac{25}{4}} = 4 - \frac{24}{25} = \frac{76}{25} = 3{,}04$$ χιλιάδες δραχμές

β.

$$P'(t) = \frac{(t-6)'\left(t^2+\frac{25}{4}\right)-(t-6)\left(t^2+\frac{25}{4}\right)'}{\left(t^2+\frac{25}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{t^2+\frac{25}{4}-2t(t-6)}{\left(t^2+\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{-t^2+12t+\frac{25}{4}}{\left(t^2+\frac{25}{4}\right)^2}\ ,\quad t \geq 0$$

$$P'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -t^2 + 12t + \frac{25}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow t = \frac{25}{2} = 12{,}5 \quad ή \quad t = -\frac{1}{2} \text{ απορρίπτεται}$$

Πρόσημο της P΄ και μονοτονία της P

t	0		12,5		$+\infty$
P΄		+	0	−	
P		$\nearrow$	|	$\searrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η τιμή του προϊόντος αυξάνεται συνεχώς από την στιγμή εισαγωγής του στην αγορά έως και τους 12,5 μήνες

γ.

Η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη όταν $t = 12{,}5$ μήνες

δ.

Η συνάρτηση $P(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[12{,}5\ ,\ +\infty)$ επομένως η τιμή του προϊόντος μετά τους 12,5 μήνες συνεχώς μειώνεται .

Όμως
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(4 + \frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}\right) = 4 + \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}\right)$$
$$= 4 + \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t^2}\right)$$
$$= 4 + \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 4 + 0 = 4$$

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του προϊόντος πάντοτε θα είναι μεγαλύτερη από τις 4 χιλιάδες, όπου $4 > 3{,}04$ δηλαδή η τιμή του προϊόντος θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την τιμή εισαγωγής του στην αγορά